

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

| 日  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 27 | 28 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 1  | 2  |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457199

排名 - 1199

多变量微积分笔记24——空间线积分

线积分或路径积分是积分的一种。在数学中，线积分的积分函数的取值沿的不是区间，而是特定的曲线，称为积分路径。在物理学上，线积分是质点在外力作用下运动一段距离后总功。

如果把空间向量场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 看作力场， $C$ 是质点在力场作用下移动的曲线，那么 $C$ 在力场中线积分就是质点在力作用下所做的功：

$$Work = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle P, Q, R \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

与平面向量场中的线积分类似，空间线积分在 $dr$ 中多了分量 $dz$ 。关于平面场中的积分，可参考《多变量微积分13——线积分》

计算空间线积分

和平面向量场的线积分一样，要用某个单变量参数转换 $x,y,z$ ,最终使空间线积分转换成普通的一元积分。

示例1：

$\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$ ，运动轨迹 $C: x = t^3, y = t^2, z = t, 0 \leq t \leq 1$ ，计算 $C$ 的线积分。

先根据 $C$ 的参数化计算 $dx, dy, dz$ ：

$$dx = 3t^2 dt, \quad dy = 2t dt, \quad dz = dt$$

$$\vec{F} = \langle yz, xz, xy \rangle = \langle t^3, t^4, t^5 \rangle$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle t^3, t^4, t^5 \rangle \cdot \langle 3t^2, 2t, 1 \rangle dt = \int_0^1 6t^5 dt = 1$$

示例较为简单，但是对于没有明确给出的参数化，就需要自己判断如何简单有效地参数化。

示例2：

计算 $C$ 的线积分， $\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$ ，运动轨迹 $C$ 由 $C_1, C_2, C_3$ 组成，如下图所示：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一） (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

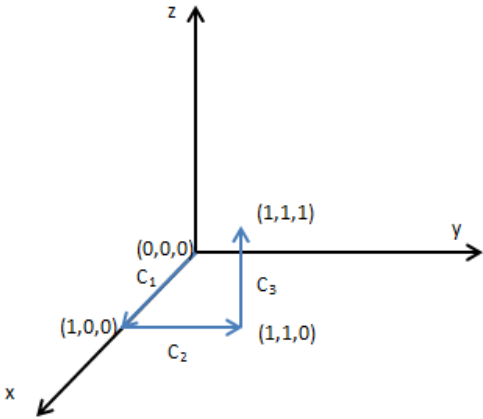
- 1. 隐马尔可夫模型（一） (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积） (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积） (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一） (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）  
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°  
--猫猫猫猫大人



$C_1, C_2$ 在xy平面，所以 $z = 0, dz = 0$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \langle yz, xz, xy \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \int_{C_1} \langle 0, 0, xy \rangle \cdot \langle dx, dy, 0 \rangle = 0$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \langle yz, xz, xy \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \int_{C_2} \langle 0, 0, xy \rangle \cdot \langle dx, dy, 0 \rangle = 0$$

对于 $C_3$ ,  $x = 1, y = 1, dx = 0, dy = 0; 0 \leq z \leq 1$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \langle yz, xz, xy \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \int_0^1 dz = 1$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$$

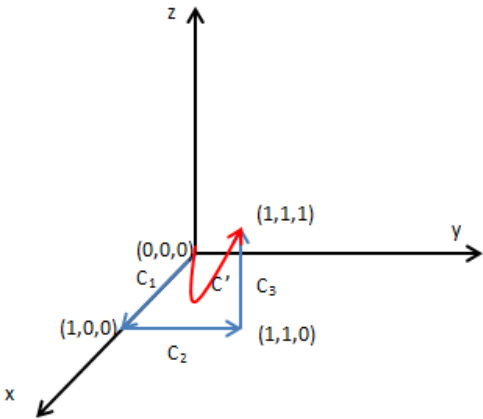
独立路径

在《多变量微积分14——保守场和独立路径》中介绍了平面梯度场中线积分的独立路径：在梯度场中，如果需要计算一个线积分，无论怎样的路径，积分值都只跟起点 $P_0$ 和终点 $P_1$ 的值有关。

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_1) - f(P_0)$$

这对于空间向量场的线积分同样适用。在上节的示例2中， $\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$ ，很容易看出， $f = xyz, \mathbf{F} = \nabla f = \langle yz, xz, xy \rangle$ ，因此向量场是保守场：

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1$$



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 提个issue，最速降线中  $v = \sqrt{2gh}$  与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

在保守场中，由于起点和终点一致，所以C的线积分和C' 一样，f是向量场的势函数。

## 梯度场的判别

如果存在下面的关系，则表明空间向量场是保守场：

$$\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

现在的问题是需要找到一个有效的方法判断场是否是保守场。这个方法基于一个事实，对于混合二阶导数，求导次序改变，其结果不变：

$$f_{xy} = f_{yx}$$

因此，如果场是保守场，则：

$$P = f_x, Q = f_y, R = f_z \Rightarrow$$

$$P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x$$

$$P_z = f_{xz} = f_{zx} = R_x$$

$$Q_z = f_{yz} = f_{zy} = R_y$$

也可以用微分的观点来看待这个问题，如果f是保守场的势函数，则：

$$Pdx + Qdy + Rdz = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

### 示例

如果  $axydx + (x^2 + z^3)dy + (byz^2 - 4z^3)dz$  是保守场，a,b的取值是什么？

如果习惯使用PQR，可以将问题转换为  $Pdx + Qdy + Rdz$ ， $P = axy$ ， $Q = x^2 + z^3$ ， $R = yz^2 - 4z^3$ ，如果是保守场，则：

$$P_y = ax = Q_x = 2x \Rightarrow a = 2$$

$$P_z = 0 = R_x = 0$$

$$Q_z = 3z^2 = R_y = bz^2 \Rightarrow b = 3$$

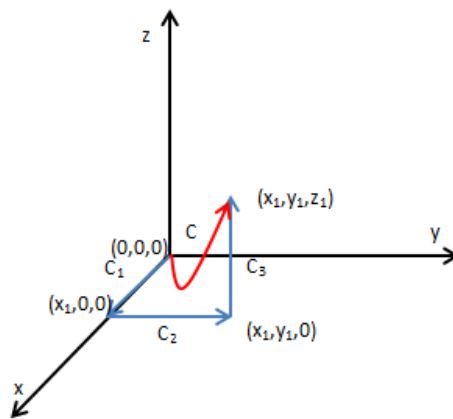
## 找出势函数

在《多变量微积分15——梯度场和势函数》中介绍过两种方法求解平面梯度场中的势函数，空间梯度场仍然可以使用这两种方法。

在上一节的示例中我们知道， $\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle$  是梯度场，现在我们尝试找到它的势函数。

### 线积分法

在梯度场中线积分的轨迹C从原点开始，终点是  $(x_1, y_1, z_1)$ 。根据独立路径的原理，梯度场中的线积分只和起点终点有关，和路径无关，所以可以寻求更简单的计算方法，将C拆分为  $C_1, C_2, C_3$  如下图所示：



on  $C_1$ ,  $y = 0, dy = 0; z = 0, dz = 0; 0 \leq x \leq x_1$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = 0$$

on  $C_2$ ,  $z = 0, dz = 0; x = x_1, dx = 0; 0 \leq y \leq y_1$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle \\ &= \int_0^{y_1} x_1^2 dy \\ &= x_1^2 y \Big|_{y=0}^{y=y_1} \\ &= x_1^2 y_1 \end{aligned}$$

on  $C_3$ ,  $x = x_1, dx = 0; y = y_1, dy = 0; 0 \leq z \leq z_1$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_3} \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle \\ &= \int_0^{z_1} 3y_1 z^2 - 4z^3 dz \\ &= y_1 z^3 - z^4 \Big|_{z=0}^{z=z_1} \\ &= y_1 z_1^3 - z_1^4 \end{aligned}$$

根据独立路径准则:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\text{end}) - f(\text{start}) = f(x_1, y_1, z_1) - f(0, 0, 0)$$

$f(0, 0, 0)$  is a constant, so:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_1, y_1, z_1) - C$$

now:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= f(x_1, y_1, z_1) - C \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= x_1^2 y_1 + y_1 z_1^3 - z_1^4 \end{aligned}$$

将xyz的下标去掉, 就得到势函数:

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^3 - z^4 + C$$

这里C是一个常数, 说明f是一个势函数族, 就像不定积分要加上常数C一样。

验证:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle = \vec{F}$$

## 不定积分法

梯度场中的势函数f满足:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 2xy, x^2 + z^3, 3yz^2 - 4z^3 \rangle$$

根据微积分基本定理, 导数的积分等于原函数, 这里将y,z看作常数, 对 $f_x$ 求x的积分:

$$f = \int 2xy dx = x^2y + g(y, z)$$

由于 $f_x$ 是偏导, 所以积分最后并不是加上常数C, 而是一个关于y和z的函数 $g(y, z)$ 。

$$f_y = x^2 + z^3 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + g(y, z)) = x^2 + g_y$$

$$\Rightarrow g_y = z^3$$

$$\Rightarrow g(x, y) = \int z^3 dy = yz^3 + h(z)$$

这里的常数是关于z的函数 $h(z)$ 。现在:

$$f = x^2y + g(y, z) = x^2y + yz^3 + h(z)$$

$$f_z = 3yz^2 - 4z^3 = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y + yz^3 + h(z)) = 3yz^2 + h'(z)$$

$$\Rightarrow h'(z) = -4z^3 \Rightarrow h = \int -4z^3 dz = -z^4 + C$$

finally:

$$f = x^2y + yz^3 + h(z) = x^2y + yz^3 - z^4 + C$$

## 综合示例

### 示例1

空间向量场 $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ , 螺旋线C可参数化为 $(\cos t, \sin t, t)$ , C from  $(1, 0, 0)$  to  $(-1, 0, \pi)$ 。计算C的线积分。

先来看C的轨迹, 如果去掉z轴, 那么C的参数化 $x = \cos t, y = \sin t$ 正好是极坐标下的圆。现在加上了z轴, 那么C的轨迹应当在柱面上。

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = dt$$

$$zx = t \cos t, \quad zy = t \sin t, \quad x = \cos t$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \langle zx, zy, x \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle \\ &= \int_0^\pi \langle t \cos t, t \sin t, \cos t \rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle dt \\ &= \int_0^\pi \cos t dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 示例2

找出b的值, 使 $\mathbf{F} = \langle y, x + byz, y^2 + 1 \rangle$ 是保守场; 当 $\mathbf{F}$ 是保守场时, 找出 $\mathbf{F}$ 的势函数。

$$Q_z = by = R_y = 2y \Rightarrow b = 2$$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle y, x + 2yz, y^2 + 1 \rangle$$

$$f = \int f_x dx = \int y dx = xy + g(y, z)$$

$$f_y = x + 2yz = \frac{\partial}{\partial y} (xy + g(y, z)) = x + g_y$$

$$\Rightarrow g_y = 2yz \Rightarrow g(y, z) = \int g_y dy = \int 2yz dy = y^2 z + h(z)$$

$$\Rightarrow f = xy + g(y, z) = xy + y^2 z + h(z)$$

$$f_z = y^2 + 1 = \frac{\partial}{\partial z} (xy + y^2 z + h(z)) = y^2 + h'(z)$$

$$\Rightarrow h'(z) = 1 \Rightarrow h = \int dz = z$$

$$\Rightarrow f = xy + y^2 z + h(z) = xy + y^2 z + z$$

验证:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle y, x + 2yz, y^2 + 1 \rangle$$

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [梯度场](#), [保守场](#), [独立路径](#), [空间线积分](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [ML \(3\) ——线性回归](#)

» 下一篇: [ML \(附录3\) ——过拟合与欠拟合](#)

posted on 2018-06-21 18:40

我是8位的

阅读(1860)

评论(0)

编辑

收藏

举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office  
文档在线编辑  
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#  
HWD科技女性故事有奖征集  
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:  
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的  
Powered by .NET 6 on Kubernetes